

I) L'introduction

Enigme: Trouver un nombre tel que:

$$\text{nombre} \times \text{nombre} = 100$$

Réponse: le même

Le nombre est: 10

$$\text{Car: } 10 \times 10 = 100$$

on dit que: $\sqrt{100} = 10$

Exemples: Calculer:

$$\bullet \sqrt{4} = 2 \quad \text{Car: } 2 \times 2 = 4$$

$$\bullet \sqrt{1} = 1 \quad \text{Car: } 1 \times 1 = 1$$

$$\bullet \sqrt{49} = 7 \quad \text{Car: } 7 \times 7 = 49$$

$$\bullet \sqrt{25} = 5 \quad \text{Car: } 5 \times 5 = 25$$

$$\bullet \sqrt{121} = 11 \quad \text{Car: } 11 \times 11 = 121$$

$$\bullet \sqrt{81} = 9 \quad \text{Car: } 9 \times 9 = 81$$

II) Rendre le dénominateur sous forme d'un entier

1) dénominateur avec 1 élément:

La règle: $\bullet \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

$$\bullet \frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \times \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b \times (\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

Exemples: Rendre le dénominateur sous forme d'un entier:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{(2-\sqrt{5}) \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{(2-\sqrt{5})\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-7 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-7\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{-7\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{-1+\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = \frac{(-1+\sqrt{2}) \times \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{(-1+\sqrt{2})\sqrt{7}}{3 \times 7} = \frac{(-1+\sqrt{2})\sqrt{7}}{21}$$

2) dénominateur avec 2 éléments:

La règle: $\bullet$ Le conjugué de $(a-b)$ est: $(a+b)$

$\bullet$ Le conjugué de $(a+b)$ est: $(a-b)$

$\bullet$ L'identité remarquable 3:

$$(a-b) \times (a+b) = (a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple: Simplifier:

$$(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5}) = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4x^2 - 5$$

III) Les bases

1) Définition:

soit $a > 0$, on dit que: la racine de x égale à a si:

$$\sqrt{x} = a$$

$\checkmark$ dans ce cas: $x = a^2 = a \times a$

Exemple:

- La racine de 25 est: 5 car $5^2 = 25$
- La racine de 81 est: 9 car $9^2 = 81$

Remarque importante: La racine d'un nombre négatif

$$\bullet \sqrt{-100} = ???$$

$$\text{Sachant que: } 10 \times 10 = 100 \quad (-10) \times (-10) = 100$$

Compte tenu:

$$\sqrt{\text{POSITIVE}} = \text{POSITIVE}$$

2) La racine et la puissance 2:

La puissance 2 élimine la racine dans 2 cas

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2} = -x$$

Exemple: Calculer:

$$\bullet \sqrt{26^2} = 26 \quad \bullet \sqrt{3^2} = 3 \quad \bullet \sqrt{(-3)^2} = 3$$

Exemples: Calculer:

$$\text{Calculer: } \sqrt{33^2} = 33 \quad \sqrt{(-5)^2} = 5$$

$$\sqrt{3^2} = 3 \quad \sqrt{(-0,4)^2} = 0,4$$

$\checkmark$ Remarque importante

$\times$ Impossible d'appliquer la loi

$$\sqrt{1+3^2} \neq \sqrt{1+9} \neq \sqrt{10} \quad \sqrt{2+x^2} \neq \sqrt{2+4} \neq \sqrt{6}$$

3) Les racines classiques:

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{400} = 20$			

$\checkmark$ Remarque importante: Les racines et la virgule

$$\sqrt{0,64} = 0,8 \quad \sqrt{0,49} = 0,7 \quad \sqrt{0,04} = 0,2$$

mais!

$$\sqrt{0,144} = 0,3794 \quad \sqrt{0,4} = 0,63245 \quad \sqrt{0,121} = 0,34785$$

Conclusion: 2 chiffres après la virgule: $\checkmark$ Possible
plus ou moins de 2 chiffres après la virgule: $\times$ Impossible!

III) Les opérations sur les Racines

1) Les opérations $\oplus$ et $\ominus$:

$$\text{on a: } \textcircled{1} n\sqrt{a} + m\sqrt{a} = (n+m)\sqrt{a}$$

$$\textcircled{2} n\sqrt{a} - m\sqrt{a} = (n-m)\sqrt{a}$$

Exemples: Simplifier:

$$\bullet 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+3+5)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\bullet -3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = (-3-2+2+5)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\bullet 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = (2-4)\sqrt{2} + (3+4)\sqrt{3} = -2\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$$

2) Les opérations $\otimes$ et $\oslash$:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} \quad \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$$

$\otimes$: Multiplication $\oslash$: Division

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemples: Calculer:

$$\bullet \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4 \quad \bullet \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

3) Simplification:

Un nombre est divisible par:

2: Se termine par: 0; 2; 4; 6; 8

3: la somme de ses chiffres est un multiple de 3

4: le nombre constitué de ses 2 derniers chiffres est un multiple de 4

5: Se termine par: 0; 5

6: Divisible par 2 et 3

9: la somme de ses chiffres est un multiple de 9

10: Se termine par: 0

Exemples: Simplifier:

$$\bullet 2\sqrt{12} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{4 \times 3} - 5\sqrt{9 \times 3} + 3\sqrt{3}$$

$$= 2 \times 2\sqrt{3} - 5 \times 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (-15+4+3)\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$$

$$\bullet 3\sqrt{45} - 7\sqrt{5} - 2\sqrt{20} + \sqrt{125} = 3\sqrt{9 \times 5} - 7\sqrt{5} - 2\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{25 \times 5}$$

$$= 3 \times 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$

$$= (9-7-4+5)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

IV) L'équation $x^2 = a$

La règle:

$$x^2 = a \begin{cases} a > 0 \rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \\ a = 0 \rightarrow x = 0 \\ a < 0 \rightarrow \text{Celle équation n'admet pas de solution} \end{cases}$$

Exemple: Résoudre les équations suivantes:

$$x^2 = 16 \quad x = \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -4$$

Cette équation admet 2 solutions: 4 et -4

Cette équation admet une unique solution: 0

Cette équation n'admet pas de solution